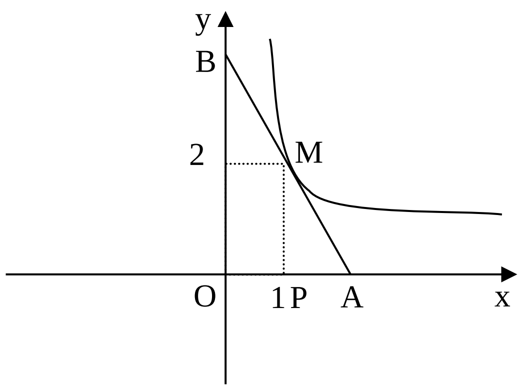
Chương 4
PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Đặt vấn đề

Trong nhiều bài toán, việc tìm mối liên hệ giữa 2 đại lượng *x, y* không phải lúc nào cũng làm được, đôi khi ta chỉ tìm được liên hệ giữa *x, y* và các đạo hàm của *y* theo *x*. Một hệ thức như thế được gọi là phương trình vi phân, từ hệ thức đó, ta Tìm được hệ thức liên hệ giữa *y* với *x* được gọi là giải phương trình vi phân.

Chẳng hạn, xét bài toán: Tìm phương trình đường cong qua điểm *M(1;2)* và có tính chất là mọi đoạn tiếp tuyến với đường cong nằm giữa 2 trục tọa độ bị tiếp điểm chia 2 đoạn, mà đoạn tới O*y* gấp 2 lần đoạn tới O*x*.



Hình 4.1

Ta nhận thấy, nếu *M(x;y)*∈L có phương trình $y = f(x)$, $y'(x) = \tan\alpha = -\frac{MP}{PA}$, do MP//OB nên có $\frac{MA}{MB} = \frac{PA}{PO} \Rightarrow PA = \frac{x}{2}$, vậy $y' = -\frac{2y}{x}$ (*). Ta dễ dàng nhận thấy, hàm $y = \frac{c}{x^2}$ (**), với c là hằng số tùy ý thỏa mãn hệ thức (*), vậy nó là nghiệm của phương trình vi phân (*).

Vậy, $y = \frac{c}{x^2}$ là dạng đường cong cần tìm. Khi nó qua điểm *M*(*1;2*) thì ta có *c* = 2, tức là đường cong thỏa mãn bài toán có dạng $y = \frac{2}{x^2}$.

Từ bài toán trên, ta đi đến định nghĩa sau.

Định nghĩa 4.1.

Phương trình vi phân là phương trình liên hệ biến độc lập hay các biến độc lập, hàm chưa biết và các đạo hàm của nó.

Nếu hàm chưa biết là hàm của 1 biến độc lập thì phương trình ấy được gọi là phương trình vi phân thường và ở trong giáo trình này ta chỉ nghiên cứu dạng phương trình vi phân có dạng này mà thôi.

Cấp của phương trình vi phân là cấp cao nhất của đạo hàm có trong mặt trong phương trình.

Nghiệm của phương trình vi phân là mọi hàm thỏa mãn phương trình, tức là khi thay nó vào phương trình vi phân ta được 1đồng nhất thức.

4.1. Phương trình vi phân cấp 1

4.1.1. Định nghĩa, khái niệm

Định nghĩa 4.2. Phương trình vi phân cấp 1 là phương trình vi phân có dạng

$$F(x,y,y') = 0 \qquad (4.1)$$

trong đó F là hàm của 3 biến độc lập.

Nếu từ *(4.1)* giải được ra

$$y' = f(x,y) \text{ hay } \frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (4.2)$$

trong đó f là hàm của 2 biến độc lập, thì *(4.2)* là dạng tường minh của phương trình vi phân cấp 1.

Ví dụ 4.1: Các phương trình vi phân cấp 1 có dạng như:

$x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = 0$; $yy' - x = 0$;...

Với phương trình vi phân *(4.2)*, nếu hàm $f(x,y)$ liên tục trong miền chứa điểm (x_0,y_0) thì tồn tại 1 nghiệm $y = y(x)$ thỏa mãn *(4.2)*, nghiệm ấy lấy giá trị y_0 khi $x=x_0$ (được gọi là điều kiện đầu hay điều kiện Cauchy), ký hiệu: $y(x_0) = y_0$ hay $y|_{x=x0}=y_0$.

Hơn nữa, nếu $\frac{\partial f}{\partial y}$ liên tục thì nghiệm ấy là duy nhất.

Nghiệm tổng quát (*NTQ*) của phương trình vi phân cấp 1 là mọi hàm $y=\varphi(x;C)$, ở đó C là hằng số tùy ý, thỏa mãn phương trình vi phân ấy với mọi C.

Nghiệm riêng (*NR*) của phương trình vi phân cấp 1 là mỗi nghiệm $y=\varphi(x;c_0)$ nhận được từ NTQ bằng cách cho C một giá trị cụ thể c_0 nào đó.

Khi giải phương trình vi phân *(4.1)* hay *(4.2)* nếu chỉ tìm được dạng

$$\phi(x,y,C)= 0 \qquad (4.3)$$

thì *(4.3)* được gọi là tích phân tổng quát (*TPTQ*) của phương trình vi phân, nói cách khác, hệ thức *(4.3)* là NTQ dạng ẩn của phương trình vi phân. Khi gán cho $C=C_0$ cụ thể nào đó ta có tích phân riêng (*TPR*) của phương trình vi phân.

4.1.2. Phương pháp giải

a) Phương trình khuyết

Phương trình vi phân cấp 1 có dạng $f(x, y,y')=0$, nếu có 1 trong các tham biến x, y không tham gia vào phương trình ta gọi là phương trình khuyết.

Ví dụ 4.2: Giải phương trình vi phân y'-cos$x$=0.

Giải:

$y'-\cos x=0 \Leftrightarrow y'=\cos x \Rightarrow y=\sin x+c$.

Ví dụ 4.3: Giải phương trình vi phân y'-y=0.

Giải: $y'-y=0 \Leftrightarrow y'=y \Rightarrow y=e^x+c$.

b) Phương trình biến phân ly

- Dạng phương trình :

$$f_1(x)\mathrm{d}x + f_2(y)\mathrm{d}y = 0 \qquad (4.4)$$

- Cách giải:

phương trình *(4.4)* $\Leftrightarrow f_2(y)dy = - f_1(x)dx$.

Lấy tích phân 2 vế

$$\int f_2(y)dy = -\int f_1(x)dx + C,$$

đây là TPTQ của *(4.4)*.

Chú ý: Phương trình vi phân có biến phân ly còn có dạng

$$M_1(x)N_2(y)dx + M_2(x)N_1(y)dy = 0 \qquad (4.5)$$

Cách giải: Xét 2 trường hợp

Trường hợp 1: Nếu $M_2(x).N_2(y) \neq 0$, ta chia 2 vế *(4.5)* cho $M_2(x).N_2(y)$ được dạng phương trình vi phân *(4.4)* đã biết cách giải.

Trường hợp 2: Nếu $M_2(x).N_2(y)=0$, ta giải trực tiếp khi $M_2(x) = 0$ hoặc $N_2(y) = 0$

Ví dụ 4.4: Giải các phương trình vi phân sau:

a) $y'cosx = \frac{y}{lny}$

b) $\frac{xdx}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{1+x^2}} = 0$, điều kiện $y(0) = 1$.

Giải:

a) $y'cosx = \frac{y}{lny} \Leftrightarrow \frac{lny}{y}dy = cosxdx$

$\Rightarrow \frac{1}{2}ln^2y = -sinx - C \Leftrightarrow \frac{1}{2}ln^2y + sinx + C = 0.$

a) Phương trình $\frac{xdx}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{1+x^2}} = 0$, tương đương với

$$x\sqrt{1+x^2}dx = y\sqrt{1+y^2}dy$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{1+x^2}d(1+x^2) = \frac{1}{2}\sqrt{1+y^2}d(1+y^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \sqrt{1+x^2}d(1+x^2) = \frac{1}{2}\int \sqrt{1+y^2}d(1+y^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}.\frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}(1+y^2)^{\frac{3}{2}} + c\ (*).$$

Thay điều kiện y(0)=1 vào (*) ta có:

$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}2^{\frac{3}{2}} + c$, từ đó suy ra $c = \frac{1}{3}\left(1 - 2^{\frac{3}{2}}\right)$, TPR của phương trình là:

$$(1+x^2)^{\frac{3}{2}} = (1+y^2)^{\frac{3}{2}} + \left(1 - 2^{\frac{3}{2}}\right)$$

c) Phương trình đẳng cấp

- Dạng phương trình:

$$y' = f(x,y) \qquad (4.6)$$

trong đó $f(x,y)$ có thể biểu diễn được thành hàm của tỷ số 2 đối số dạng

$$y' = f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (4.7)$$

- Cách giải:

Phương trình *(4.7)* $\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$

Đặt $y = ux \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u)$ (*), (*) $\Leftrightarrow x\mathrm{d}u = \mathrm{d}x(\varphi(u) - u)$

Nếu $\varphi(u) - u \neq 0$ thì ta có: $\frac{dx}{x} = \frac{du}{\varphi(u)-u}$ là dạng phương trình vi phân có biến phân ly, đã biết giải.

Nếu $\varphi(u) - u = 0$ tại $u = u_0$ thì *(4.7)* có 2 nghiệm riêng là $y = u_0x$

Nếu $\varphi(u) - u \equiv 0$ thì từ (*) ta có $du = 0$ hay $u = C$ là hằng số tùy ý, lúc đó NTQ của *(4.7)* là $y = Cx$.

Ví dụ 4.5: Giải các phương trình vi phân sau:

a) $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$

b) $(y - x)\mathrm{d}x + (y + x)\mathrm{d}y = 0$

Giải:

a) $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2} = \frac{2}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}$, đặt $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = u'x + u$; ta có phương trình

$$u'x + u = \frac{2}{\frac{1}{u} - u} = \frac{2u}{1-u^2} \Rightarrow \frac{du}{dx}x = \frac{2u}{1-u^2} - u = \frac{2u^3+u}{1-u^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1-u^2}{2u^3+u}du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{1-u^2}{2u^3+u}du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int\left(\frac{1}{u} - \frac{2u^2}{2u^3+1} - \frac{u}{2u^2+1}\right)du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow lnu - \frac{1}{3}ln(2u^3+1) - \frac{1}{4}\ln(2u^2+1) = \ln(x) + C,$$

ta có TPTQ:

$$ln\frac{y}{x} - \frac{1}{3}ln\left(2\left(\frac{y}{x}\right)^3 + 1\right) - \frac{1}{4}\ln\left(2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right) = \ln(x) + C$$

b) $(y - x)\mathrm{d}x + (y + x)\mathrm{d}y = 0$, chia cả hai vế cho xy ta có

$$\left(\frac{y}{x} - 1\right)dx = -\left(\frac{y}{x} + 1\right)dy$$

đặt $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = u'x + u$; ta có phương trình

$$u - 1 = -(u+1)(u'x + u)$$

$$\Rightarrow \frac{u-1}{u+1} - u = -x\frac{du}{dx} \Rightarrow \frac{-u^2-1}{u+1} = -x\frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{u+1}{u^2+1}du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{u+1}{u^2+1}du = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(u^2+1) + \arctan(u) = \ln(x) + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \ln(x) + C.$$

d) Phương trình tuyến tính

-Dạng phương trình:

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (4.8)$$

trong đó *p(x), q(x)* là 2 hàm liên tục của *x*.

Nếu $q(x) \neq 0$ thì *(4.8)* được gọi là phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất.

Nếu $q(x) \equiv 0$, tức *(4.8)* có dạng:

$$y' + p(x)y = 0 \qquad (4.9)$$

phương trình vi phân *(4.9)* được gọi là phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng của phương trình *(4.8)*.

- Cách giải:

Xét phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất *(4.9)*, nếu $y \neq 0$ thì suy ra $\frac{dy}{dx} = -p(x)dx$, ta có NTQ của phương trình *(4.9)* là:

$$y = C.e^{-\int p(x)dx} \qquad (4.10)$$

Khi $y = 0$ ta thấy thỏa mãn phương trình vi phân *(4.9)* nên $y=0$ là NR của *(4.9)*.

Trong *(4.10)*, ta coi $C = C(x)$ và tìm $C(x)$ để *(4.10)* là 1 nghiệm của *(4.8)*. Lấy đạo hàm 2 vế của *(4.10)* rồi thế vào *(4.8)* thu gọn và tính được

$$C = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + k \qquad (*)$$

Thay *(*)* vào *(4.10)* được nghiệm tổng quát của *(4.8)* là:

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + k\right], \qquad (4.11)$$

k là hằng số tùy ý.

Chú ý:

i) Từ cách giải trên, ta rút ra kết luận rằng:

NTQ*(4.8)* = NTQ*(4.9)* + 1 NR*(4.8)*

ii) Trong thực tế, người ta Tìm NTQ của *(4.8)* bằng cách như sau:

Bước 1. Tìm 1 nguyên hàm của $\int p(x)dx$, giả sử là $P(x)$

Bước 2. Tìm 1 nguyên hàm của $\int q(x)e^{P(x)}dx$, giả sử là $Q(x)$

Bước 3. Kết luận NTQ của *(4.8)* là $y = e^{-P(x)}[Q(x) + C]$, C là hằng số tùy ý.

Ví dụ 4.6: Giải các phương trình vi phân sau:

a) $y' + xy = 4x$, thỏa $y(0) = 0$.

b) $y' - y.\sin x = \sin x.\cos x$.

Giải:

a) Phương trình $y' + xy = 4x$ (*) có phương trình thuần nhất

$y' + xy = 0$ (**).

Phương trình (**) có nghiệm tổng quát

$$\frac{dy}{dx} = -xy \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -xdx \Leftrightarrow \ln(y) = -\frac{x^2}{2} + e^C$$

$$\Rightarrow y = C.e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Tìm nghiệm riêng của (*), cho nghiệm riêng của (*) có dạng Y=C(x). $e^{-\frac{x^2}{2}}$, ta có

$Y' = C'(x).e^{-\frac{x^2}{2}} - x.C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$, thay vào (*) ta có:

$C'(x).e^{-\frac{x^2}{2}} - x.C(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + x.C(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = 4x$

$\Leftrightarrow C'(x) = 4xe^{\frac{x^2}{2}} = 4\left(\frac{x^2}{2}\right)' e^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow C(x) = 4e^{\frac{x^2}{2}} + k$, k là hằng số. Vậy nghiệm riêng của (*) là: $Y = \left(-4e^{\frac{x^2}{2}} + k\right) e^{-\frac{x^2}{2}}$ và nghiệm tổng quát của (**) là:

$y = \left(4e^{\frac{x^2}{2}} + k\right) e^{-\frac{x^2}{2}} + C.e^{-\frac{x^2}{2}}$.

b) Phương trình $y' - y\sin x = \sin x\cos x$ (*) có phương trình thuần nhất

$$y' - y\sin x = 0 \ (**).$$

Phương trình (**) có nghiệm tổng quát

$$\frac{dy}{dx} = ysinx \ \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = sinxdx \Leftrightarrow \ln(y) = -cosx + e^C$$

$$\Rightarrow y = C.e^{-cosx}.$$

Tìm nghiệm riêng của (*)

Cho nghiệm riêng của (*) có dạng $Y=C(x).\,e^{-\,cosx}$, ta có

$Y' = C'(x).e^{-cosx} + sinx.C(x)e^{-\,cosx}$, thay vào (*) ta có:

$C'(x).e^{-\,cosx} + sinx.C(x)e^{-cosx} - sinx.C(x)e^{-cosx} = 4x$

$\Leftrightarrow C'(x) = 4xe^{cosx} \Rightarrow C(x) = 4\int xe^{cosx} + k$, k là hằng số. Vậy nghiệm riêng của (*) là: $Y = (4\int xe^{cosx} + k)e^{-cosx}$ và nghiệm tổng quát của (**) là:

$y = (4\int xe^{cosx} + k)e^{-cosx} + C.e^{-cosx}$.

e) Phương trình Bernoully

- Dạng phương trình:

$$y' + p(x)y = q(x).y^{\alpha} \qquad (4.12)$$

trong đó $p(x)$, $q(x)$ liên tục, $\alpha \in R$.

Cách giải:

Với $\alpha = 0$; $\alpha = 1$ thì *(4.12)* có dạng phương trình tuyến tính đã biết giải.

Với $\alpha \neq 0$; $\alpha \neq 1$, ta xét

$y = 0$ bằng cách thử trực tiếp ta được $y = 0$ là 1 NR của *(4.12)*

$y \neq 0$, ta chia 2 vế *(4.12)* cho y^{α} được phương trình:

$$y'.y^{-\alpha} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$$

Đặt $z = y^{1-\alpha}$ suy ra $z' = (1 - \alpha)y^{-\alpha}y'$, do đó có phương trình

$$z' + (1 - \alpha)p(x)z = (1 - \alpha)q(x) \qquad (4.13)$$

là phương trình vi phân tuyến tính đã biết cách giải.

Lưu ý: Trong quá trình giải các bài tập cụ thể, dạng phương trình *(4.13)* ta không nhất thiết phải nhớ công thức một cách đầy đủ, chỉ cần nhận đúng dạng phương trình Bernoully và đặt $z = y^{1-\alpha}$, biến đổi và thay vào phương trình ta sẽ tìm được phương trình dạng *(4.13)*.

Ví dụ 4.7: Giải phương trình

a) $y' + xy(1 + y) = 0$.

b) $y' + y = e^{x/2}y^{1/2}$.

Giải:

a) $y' + xy(1 + y) = 0 \Leftrightarrow y' + xy = -xy^2$, đặt $z=y^{1-2}=y^{-1}$, vậy $y=z^{-1}$, $y'= -z^{-2}z'$.

Phương trình $y'+xy=-xy^2$, trở thành

$-z^{-2}.z'+xz^{-1}=-x.z^{-2} \Leftrightarrow -z'+xz=-x$ và đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 đã biết cách giải, người đọc giải phần còn lại xem như bài tập.

b) $y' + y = e^{\frac{x}{2}}y^{\frac{1}{2}}$,

đặt $z = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}$, vậy $y=z^2$, $y'= 2z.z'$. Phương trình $y' + y = e^{\frac{x}{2}}y^{\frac{1}{2}}$, trở thành $2zz'+z^2=e^{\frac{x}{2}}z$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{r} z = 0 \\ 2\,z' + z = e^{\frac{x}{2}} \end{array}\right.$,

Với $z=0$ ta có $y=0$ là một nghiệm riêng của phương trình.

Với $2\,z' + z = e^{\frac{x}{2}}$ đây là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1 đãã biết cách giải, người đọc giải phần còn lại xem như bài tập.

f) Phương trình vi phân toàn phần

Dạng phương trình:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0,$$

trong đó

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

với mọi $(x,y) \in D$.

Tích phân tổng quát

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C,$$

hoặc

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C.$$